MINISTERE DE L'URBANISME
DU LOGEMENT ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1986

COMPOSITION COMMUNE DE MATHEMATIQUES

(2)

(temps accordé : 4 heures)

Nota : Les candidats sont invités à soigner la présentation, écrire lisiblement, mettre en évidence les principaux résultats et donner des démonstrations rigoureuses et concises.

Dans tout le problème, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels ($n \in \mathbb{N}$).

Préliminaires

0.1 - Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur [-1, +1] ; étudier l'existence de :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

0.2 - Déterminer quatre réels a, x_1, x_2, x_3 tels que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ soit vérifiée l'égalité :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = a\,[P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)]$$

0.3 - Calculer, à 10^{-2} près, après en avoir justifié l'existence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$$

Première partie

I.1 - k désignant un entier naturel quelconque, établir l'existence d'un polynôme T_k de $\mathbb{R}_k[X]$, tel que pour $\theta \in [0,\pi]$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$. Montrer que la famille de polynômes $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.2 - a) - Déterminer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 et les racines de ces polynômes.

b) - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, définir les racines de T_k ; montrer qu'elles sont simples et dans l'intervalle]-1, +1[.

I.3 - a) - Calculer, pour k et ℓ entiers naturels :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_k(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

On étudiera les cas $k \neq \ell$ et $k = \ell$.

b) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déduire de la question précédente que :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

I.4 - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, établir la relation de récurrence suivante :

$$T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Quelle est la parité des polynômes T_k ?

Deuxième partie

II.1 - Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ en fonction de α_0.

II.2 - Soit, en particulier, $P = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k T_k$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, et soient x_1, x_2, x_3 les racines de T_3 ($x_1 < x_2 < x_3$).

a) - Calculer $\sum_{i=1}^{3} P(x_i)$ en fonction de α_0 et retrouver le résultat de la question 0.2.

Tournez la page S. V. P.

Page 150 1986 Ecoles de Travaux Publics E.I.T.P.E. Math 1

b) - Soit $f \in \mathbb{R}_5[X]$. Montrer que :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{3}\left(\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\right)$$

On pourra utiliser la division euclidienne de f par T_3.

c) - Calculer alors, après avoir effectué un changement de variable :

$$\int_{0}^{+1} \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

II.3 - Déterminer cinq constantes a', x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 telles que l'égalité :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = a'\,[f(x'_1) + f(x'_2) + f(x'_3) + f(x'_4)]$$

soit valable pour tout polynôme f de $\mathbb{R}_7[X]$.

II.4 - On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n^* = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$; soit f une fonction continue sur [-1, +1] à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|||f||| = \sup_{t\in[-1,+1]} |f(t)|$. On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

a) - Montrer que T_n^* est unitaire, et évaluer $|||T_n^*|||$. Pour quelles valeurs de [-1, +1] ce maximum est-il obtenu ?

b) - Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit $R = T_n^* - P$. En supposant, par l'absurde, que $|||P||| < |||T_n^*|||$, montrer que R change n fois de signe sur [-1, +1]. Que peut-on en déduire ?

Troisième partie

III.1 - Soit $x \in [-1, +1]$

a) - On pose $u_n(t,x) = t^n T_n(x)$ pour $t \in]-1, +1[$, $n \in \mathbb{N}$.

Etudier la convergence de la série $\sum u_n(t,x)$ et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t,x)$ en fonction de t et de x. On pourra utiliser $\theta = \text{Arccos}x$.

b) - On pose $v_n(t,x) = \frac{t^n}{n!} T_n(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Etudier la convergence de la série $\sum v_n(t,x)$ et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t,x)$ en fonction de t et de x.

III.2 - Soit $x \in [-1, +1]$, $t \in]-1, +1[$, $w_n(t,x) = \frac{t^n}{n} T_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) - Etablir la convergence de la série $\sum w_n(t,x)$.

b) - Soit : $S(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} T_n(x)$

Calculer $\frac{\partial}{\partial t} S(t,x)$ puis $S(t,x)$ en fonction de t et de x.

III.3 - Pour $x \in [-1, +1]$, on étudie dans cette question la série $\sum \frac{T_n(x)}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) - Etablir l'égalité :

$$\frac{\cos\theta - t}{1-2t\cos\theta+t^2} = \cos\theta + t.\cos 2\theta + \ldots + t^{n-1}.\cos n\theta + \frac{t^n\cos(n+1)\theta - t^{n+1}\cos n\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n\cos(n+1)\theta - t^{n+1}\cos n\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}\,dt$

En déduire que la série $\sum \frac{T_n(x)}{n}$ pour $x \in]-1, +1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge,

et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n(x)}{n}$ en fonction de x.

b) La série $\sum \frac{T_n(1)}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge-t-elle ?

Tournez la page S. V. P.

Ecoles de Travaux Publics
E.I.T.P.E. .Math I
1986
page 151

c) - Comment se transforme l'égalité obtenue en a) lorsque $\cos\theta = -1$?

En déduire la convergence de la série :

$$\Sigma \frac{T_n(-1)}{n} \quad \text{et calculer} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n(-1)}{n}$$

III.4 - Etudier la convergence de la série $\Sigma (-1)^n . \frac{T_n(x)}{n}$ pour $x \in [-1, +1]$,

et, en cas de convergence, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . \frac{T_n(x)}{n}$.

III.5 - En déduire la convergence et la somme de la série $\Sigma \frac{1}{n} \sin\{\frac{(4n-3)}{6}\pi\}$

$(n \in \mathbb{N}^*)$.

Quatrième partie

Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur [-1, +1]. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\gamma_o = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Pour toute fonction h, à valeurs réelles, continue sur [-1, +1], on définit :

$$\|h\|^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

IV.1 - a) - Soit $\phi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k$ où $a_o, a_1, \ldots a_n$ sont (n+1) réels . Calculer

$\|f - \phi_n\|^2$ en fonction de $\|f\|^2$, $a_o, a_1, \ldots a_n$, $\gamma_o, \gamma_1, \ldots \gamma_n$.

b) - Calculer $\inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|^2$ en fonction de $\|f\|^2$, $\gamma_o, \gamma_1, \ldots \gamma_n$.

IV.2 - a) - En déduire que la série $\Sigma \gamma_k^2$ est convergente et que:

$$2\gamma_o^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k^2 \leqslant \frac{2}{\pi}\|f\|^2$$

b) Lorsque $f(x) = |x|$, calculer les coefficients γ_k.

En admettant que, pour $x \in [-1,+1]$,

$$|x| = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k T_k(x) ,$$

calculer:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$$

et retrouver le résultat de la question 0.3.

page 152 1986 Ecoles des Travaux Publics E.I.T.P.E. Math 1